Liczba π a suma odwrotności kwadratów liczb naturalnych.

Piotr Grzeszczuk

Politechnika Białostocka

Dzień liczby π, 14 marca 2022

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ będzie ciągiem liczbowym. Rozważamy ciag sum częściowych

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

....

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Jeśli istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, to s nazywamy sumą ciągu $\{a_n\}$ i piszemy

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Przykład 1.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \infty.$$

Dowód. Dla $m = 2^n$ mamy nierówność

$$1+\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>\frac{1}{2}}$$

$$+ \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)}_{>\frac{1}{2}} > 1 + \frac{n}{2}$$

□

Przykład 2. *Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność:*

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Dowód. Dla dowolnej liczby całkowitej $k > 1$ mamy

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Stąd

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 1+\left(1 - \frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2-\frac{1}{n} < 2.$$

□

Twierdzenie 3. (**Twierdzenie Eulera, 1734**)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Tożsamości trygonometryczne

$$\sin nx = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x + \binom{n}{5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - \ldots \tag{1.1}$$

$$\cos nx = \binom{n}{0} \cos^n x - \binom{n}{2} \sin^2 x \cos^{n-2} x + \binom{n}{4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \ldots$$

Udowodnić je można stosując indukcję oraz tożsamości:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

lub posługując się liczbami zespolonymi (stosujac wzór de Moivre'a oraz wzór dwumienny Newtona)

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k} x \cdot i^k \cdot \sin^k x$$

Twierdzenie 4. *Dla dowolnej liczby całkowitej $m \geqslant 1$ zachodzi tożsamość:*

$$\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{m(2m-1)}{3} \tag{1.2}$$

Przykład 5. *Dla $m = 2, 3$ otrzymujemy tożsamości:*

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{5} + \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{5} = 2$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{7} = 5.$$

Dowód. Z powyższej tożsamości (1.1), że jeśli $\sin x \neq 0$, to

$$\frac{\sin nx}{\sin^n x} = \binom{n}{1} \operatorname{ctg}^{n-1} x - \binom{n}{3} \operatorname{ctg}^{n-3} x + \binom{n}{5} \operatorname{ctg}^{n-5} x - \ldots$$

Dla $n = 2m + 1$ oraz $x = \dfrac{k\pi}{2m+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ otrzymujemy $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ oraz

$$0 = \binom{2m+1}{1} \operatorname{ctg}^{2m} \frac{k\pi}{2m+1} - \binom{2m+1}{3} \operatorname{ctg}^{2(m-1)} \frac{k\pi}{2m+1} + \binom{2m+1}{5} \operatorname{ctg}^{2(m-2)} \frac{k\pi}{2m+1} - \ldots$$

W szczególności każda z liczb $a_k = \operatorname{ctg}^2 \dfrac{k\pi}{2m+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$f(t) = \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} + \ldots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}.$$

Stąd

$$f(t) = \binom{2m+1}{1}(t - a_1)(t - a_2) \ldots (t - a_m).$$

Porównanie współczynników przy t^{m-1} daje równość:

$$\binom{2m+1}{1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) = \binom{2m+1}{3},$$

a więc

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3}$$

□

Ponieważ

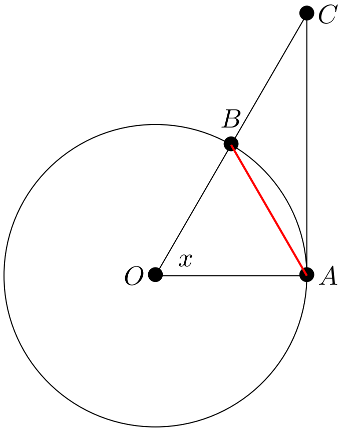
$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$$

więc mamy kolejną tożsamość:

$$\frac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi}{2m+1}} + \frac{1}{\sin^2 \dfrac{2\pi}{2m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sin^2 \dfrac{m\pi}{2m+1}} = \frac{2m(m+1)}{3} \tag{1.3}$$

Twierdzenie 6. *Dla dowolnej liczby dodatniej $x < \dfrac{\pi}{2}$ zachodzą nierówności:*

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$



Dowód.
Rozważmy okrąg o promieniu 1 i kąt środkowy $\angle AOB = x$. Mamy

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\sin x, \quad S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \ \text{ oraz } \ S_{\text{wycinek}\, AOB} = \frac{1}{2}x.$$

$\square$

W szczególności, jeśli $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, to

$$\operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\frac{2m(m-1)}{3} &= \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)\\
&< \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} + \frac{(2m+1)^2}{2^2\pi^2} + \ldots + \frac{(2m+1)^2}{m^2\pi^2}\\
&< \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2m+1}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sin^2 \frac{m\pi}{2m+1}}\\
&= \frac{2m(m+1)}{3}.
\end{aligned}$$

Tak więc

$$\frac{4m(m-1)}{(2m+1)^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} < 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} < \frac{4m(m+1)}{(2m+1)^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}$$

Ponieważ $\lim_{m\to\infty} \frac{4m(m-1)}{(2m+1)^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{4m(m+1)}{(2m+1)^2} = 1$, więc

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Funkcja ζ (zeta) Riemanna

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

Kilka wartości wyznaczonych przez Eulera:

- $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$
- $\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$
- $\zeta(8) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$
- $\zeta(10) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}$
- $\zeta(12) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$

Twierdzenie 7. *Dla liczby* $k \in \mathbb{N}$

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \cdot \pi^{2k}$$

gdzie B_n *oznacza* n*-tą liczbę Bernoulliego.*

Liczby Bernoulliego spełniają rekurencję: $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ oraz

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0 \quad \text{dla} \quad n > 2.$$